# IST DAS DIRACSCHE VERFAHREN DER LINEARISATION NOTWENDIG?

V. S. VRKLJAN IN ZAGREB

Received March 27, 1951

BEKANNTLICH liefert das Diracsche Verfahren der Linearisation des Ausdrucks[1]

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2c^2 = \frac{u^2}{c^2}$$

hinreichende Bedingung dafür, um das Spinphänomen als auch das damit zusammenhängende magnetische Moment des Elektrons (bzw. des Positrons) theoretisch zu beherschen.* Es drängt sich aber die Frage auf, ob dieses *Dirac*sche Verfahren die einzige Möglichkeit der Linearisation bedeutet, dass es also nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, oder ob auch andere davon etwas verschiedene Möglichkeiten der Linearisation bestehen, welche ebenso zu den brauchbaren Gleichungen für das Elektron bzw. das Positron führen.†

## I

Wir können leicht quadratische hermitische Matrizen 4. Ordnung finden, wo

$$(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \alpha_4 m_0 c)(\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_x + \beta_4 m_0 c) = a \,.\, 1 \,.\, \frac{u}{c} \,.\, b \,.\, 1 \,.\, \frac{u}{c} \tag{1}$$

wird; man braucht nur aus den *Dirac*schen Matrizen $\gamma_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ die neuen Matrizen

$$\alpha_r = a\gamma_r \text{ und } \beta_r = b\gamma_r \tag{2}$$

unter der Bedingung

$$a \,.\, b = 1 \tag{3}$$

definieren. Es erfüllen dann die Matrizen $\alpha_r$ und $\beta_r$ die Bedingungen

$$\alpha_k\beta_l + \beta_l\alpha_k = 2\delta_{kl} \,.\, 1 \tag{4}$$

wo

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1\ (k = l = 1, 2, 3, 4) \\ 0\ (k = l) \end{cases} \tag{5}$$

* Die obige Gleichung lässt sich bekanntermassen leicht verallgemeinern für den Fall, dass ein elektromagnetisches Feld vorhanden ist.

† Eine solche Frage scheint nicht nur vom rein erkenntnistheoretischen Interesse sein; sie könnte vielleicht auch vom physikalischen Standpunkt Interesse erwecken, da man von vornherein nicht sagen kann, zu welchen physikalischen Schlüssen die Antwort auf diese Frage führen könnte.

das bekannte Symbol von *Kronecker*[2] bedeutet. Die Bedingung (3) kann man indessen leicht durch geeignete Wahl der Grössen $a$ und $b$ erfüllen, z. B. $a = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $b = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, wo $n$ eine beliebige reelle Zahl bedeutet (dabei vor $\sqrt{n+1}$ in $a$ und $b$ dasselbe Vorzeichen gedacht).

Selbstverständlich erfüllen dann die Matrizen $\alpha_\gamma$ an und für sich als auch die Matrizen $\beta_\gamma$ an und für sich nur die *Dirac*schen Regeln über die Antikommutativität, nicht aber die *Dirac*sche Vorschrift, dass das Quadrat jeder dieser Matrix eine Einheitsmatrix ist.

Eine solche Interpretation führt jedoch zuletzt zurück zu der *Dirac*schen Theorie; denn man braucht nur die gewonnenen linearisierten Gleichungen mit dem Faktor vor $\frac{u}{c}$, also mit dem Skalar $a$, wenn es sich um die Matrizen $\alpha_\gamma$ bzw. mit dem Skalar $b$, wenn es sich um die Matrizen $\beta$ handelt, zu dividieren.

## II

### 1. Wir werden nun versuchsweise allgemeiner setzen

$$(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \alpha_4 m_0 c)(\beta_2 p_x + \beta_3 p_y + \beta_3 p_z + \beta_4 m_0 c) = 1\,\frac{u}{c}\cdot\xi\,\frac{u}{c} \qquad (6)$$

mit der Forderung der Vorschriften (für die quadratischen hermitischen Matrizen 4. Ordnung $\alpha_k$ und $\beta_l$)

$$\alpha_k\beta_l + \alpha_l\beta_k = 2\delta_{kl}\,.\,\xi \quad (k,\ 1 = 1, 2, 3, 4) \qquad (7\,a)$$

Hier haben wir definiert

$$\alpha_k\beta_k = \xi \quad (k,\ 1 = 1, 2, 3, 4) \qquad (7\,b)$$

und können gleich zeigen, dass es tatsächlich möglich ist, solche acht Matrizen zu finden; z. B.

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (8\,a)$$

$$\beta_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \beta_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \beta_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (8\,b)$$

mit

$$\xi = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Wir bemerken aber eben, dass die Matrix $\xi$ nach der bekannten Regel[3] antihermitisch ist, denn sie entspricht dem antikommutativen Produkt $\alpha_k \beta_k$ ($k$, $1 = 1, 2, 3, 4$) hermitischer Matrizen $\alpha_k$ und $\beta_k$. Ebenso können wir bemerken, dass [also Folge der Definition (7 *b*)]

$$\xi\beta_k = -\beta_k\xi = \alpha_k \text{ und } \alpha_k\xi = -\xi\alpha_k = \xi \tag{9}$$

ist. Die Tatsache aber, dass die Matrix $\xi$ eine antihermitische Matrix ist, steht keineswegs im Wege, denn wir werden weiter (unter 3) sehen, dass die Gleichungen, auf Grund der Matrizen $\alpha_r$ (kombiniert mit $\xi$) geschrieben, identisch sind mit den Gleichungen, die auf Grund der Matrizen $\beta_r$ (kombiniert mit der Einheitsmatrix), also auf Grund aller hermitischer Matrizen geschrieben sind.

Es wird gezeigt, dass eine solche "assymetrische" Linearisation gemäss der Gleichung (6) zu den gleichen Resultaten führt wie die "symmetrische" Linearisation von *P. A. M. Dirac*, nur mit dem Unterschied, dass man sich durch Verwendung der Matrix $\xi$ zugleich (d. h. in einer Ableitung) mit zwei Arten der Matrizen bedienen kann.

## 2. Das magnetische Moment des Elektrons (bzw. des Positrons) und die Diracsche Methode

Das magnetische Moment des Elektrons kann man entsprechend der hier vorgelegten Linearisation mittels der *Dirac*schen Methode so erhalten, dass man z. B. auf die Gleichung [wo $P_r = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_r} - \frac{\epsilon}{c} A_r$ ($r = 1, 2, 3$) und $P_4 = -\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V$ die bekannten Operatoren bedeuten[4]]

$$(\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 + \beta_4 m_0 c - \xi P_4)\,\Psi = 0 \tag{10 a}$$

den Operator

$$(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 m_0 c + P_4) \tag{10 b}$$

(von der linken Seite) anwendet; man erhält so nach kurzer ffiechnung unter Beachtung von (7 *a*) und (7 *b*)

$$\begin{aligned} \{\xi\,(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m_0^2c^2 - P_4^2) + \alpha_1\beta_2\,(P_1P_2 - P_2P_1) \\ + \alpha_2\beta_3\,(P_2P_3 - P_3P_2) + \alpha_3\beta_1\,(P_3P_1 - P_1P_3) + \beta_1\,(P_4P_1 - P_1P_4) \\ + \beta_2\,(P_4P_2 - P_2P_4) + \beta_3\,(P_4P_3 - P_3P_4)\ \Psi = 0. \end{aligned} \tag{10 c}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Gleichung vollkommen identisch ist mit der *Dirac*schen Gleichung 2. Ordnung, welche das das magnetische und das elektrische Moment des Elektrons ergibt. Man braucht nur diese Gleichung (10 *c*) von der rechten Seite der dort sich befindenden Matrizenprodukten mit $-\xi$ multiplizieren und man bekommt so [mit Rücksicht auf (9)]

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}_1{}^2 + \mathrm{P}_2{}^2 + \mathrm{P}_3{}^2 + m_0{}^2c^2 - \mathrm{P}_4{}^2 + \alpha_1\alpha_2(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1) \\ & \quad + \alpha_2\alpha_3(\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 - \mathrm{P}_3\mathrm{P}_2) + \alpha_3\alpha_1(\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_3) + \alpha_1(\mathrm{P}_4\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_4) \\ & \quad + \alpha_2(\mathrm{P}_4\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4) + \alpha_3(\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3 - \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4)\,\Psi = 0 \end{aligned} \tag{10 d}$$

Wir können aber in der Ableitung der Gleichung 2. Grades formal noch eine andere Kombination als bisher von den Matrizen $\alpha_r$ und $\beta_r$ erhalten, wenn wir auf die Gleichung 1. Grades

$$(\alpha_1\mathrm{P}_1 + \alpha_2\mathrm{P}_2 + \alpha_3\mathrm{P}_3 + \alpha_4 m_0 c - \xi\mathrm{P}_4)\,\Psi = 0 \tag{11 a}$$

nochmals denselben Operator $\alpha_1\mathrm{P}_1 + \alpha_2\mathrm{P}_2 + \alpha_3\mathrm{P}_3 + \alpha_4\, m_0 c - \xi\mathrm{P}_4$ anwenden. Wir erhalten nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} & \{P_1{}^2 + \mathrm{P}_2{}^2 + \mathrm{P}_3{}^2 + m_0{}^2c^2 - \mathrm{P}_4{}^2 + \alpha_1\alpha_2(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1) \\ & \quad + \alpha_2\alpha_3(\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 - \mathrm{P}_3\mathrm{P}_2) + \alpha_3\alpha_1(\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_3) + \beta_1(\mathrm{P}_4\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_4) \\ & \quad + \beta_2(\mathrm{P}_4\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4) + \beta_3(\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3 - \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4)\,\Psi = 0. \end{aligned} \tag{11 b}$$

Mit Rücksicht auf (9) können wir hier statt den Produkten $\alpha_k\alpha_l$ die Produkte $\beta_k\beta_l$ schreiben wodurch die Gleichung (11 *b*) identisch wird mit der *Dirac*schen Gleichung, wie man sie auf Grund der Matritzen $\beta$ (kombiniert mit der Einheitsmatrix) erhalten kann.

## 3. Das magnetische Moment des Elektrons und die Darwinsche Methode

Auch die bekannte *Darwin*sche Methode (5) zur Berechnung des magnetischen und des elektrischen Moments des Elektrons (bzw. des Positrons) kann man mittels der linearisierten Gleichungen (10 *a*) bzw. (11 *a*) anwenden. Um aber die Berechnungen in dieser Hinsicht zu vermeiden, kann man besser einen anderen Weg einschlagen, der sich als zweckmässig auch für andere Ableitungen zeigen wird. Wenn wir nämlich in der *Dirac*schen Gleichung

$$\begin{aligned} & (\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_z + \beta_4 m_0 c)(\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_z + \beta_4 m_0 c) \\ & \quad = 1 \cdot \frac{u}{c} \cdot 1 \cdot \frac{u}{c} \end{aligned} \tag{12 a}$$

beiderseits den linken Faktor mit der Matrix $\xi$ multiplizieren (die Multiplikation der Matrizen $\beta_k$ mit $\xi$ von der linken Seite durchgeführt gedacht), so erhalten wir inbezug auf (9), nach Gleichsetzen der linken und der rechten Faktoren auf beiden Seiten der so gewonnenen Gleichung und nach Durchführung notwendiger wohlbekannten Umformungen

$$(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 m_0 c - \xi P_4)\,\Psi = 0 \tag{12 b}$$

$$(\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 + \beta_4 mc - P_4)\,\Psi = 0 \tag{12 c}$$

Schreiben wir die so erhaltenen Gleichungen (12 *b*) und (12 *c*) gemäss den Matrizen (8 *a*) und (8 *b*) explizite auf, dann können wir gleich ersehen, dass einzelne Gleichungen dieser zwei Gruppen untereinander identisch sind, und zwar (der Reihe nach): die erste (zweite, dritte vierte) Gleichung aus (12 *b*) ist mit der dritten (vierten, ersten, zweiten) Gleichung aus (12 *c*) identisch. Die antihermitische Matrix $\xi$, kombiniert mit der hier vorgelegten hermitschen Matrizen $\alpha_\gamma$, bedeutet also nur eine andere Reihenfolge der *Dirac*schen Gleichungen, geschrieben auf Grund der Matrizen $\beta_\gamma$ (kombiniert mit der Einheitsmatrix). Da die zweite ($\beta$ —) Gruppe der Gleichungen (12 *c*) zugleich vollkommen der *Dirac*schen Theorie entspricht so kann man selbstverständlich die *Darwin*sche Methode auf das Gleichungs-system (12 *b*) anwenden, weil sie auf das Gleichungssystem (12 *c*) anwendbar ist.

## 4. Das Magnetische Moment des Elektrons und die Methode des Wellenpaketes

Auf Grund des oben gesagten könnte es scheinen, dass es kaum vom Interesse sein könnte, weitere Ableitungen aus der *Dirac*schen Theorie auf Grund der hier vorgelegten Linearisation (d. h. mittels der Matrix $\xi$) zu explizieren. Aber Eines wäre sicher interessant und zwar die Ableitung der Kontinuitätsgleichung. Zu diesem Zweck denken wir die Gleichungen (12 *b*) der Einfachheit halber bei der Abwesenheit des elektromagnetischen Feldes aufgeschrieben und auch die ihnen konjugiert-komplex aufgeschriebenen Gleichungen. Dann denken wir die erste Gruppe von vier Gleichungen mit $\frac{i}{\hbar}$ und dann der Reihe nach mit $\overset{*}{\Psi}_3$, $-\overset{*}{\Psi}_4$, $-\overset{*}{\Psi}_1$ und $\Psi_2$ multipliziert. Wir denken weiter die zweite Gruppe von vier (zu der ersten Gruppe konjugiert-komplex aufgeschriebenen Gleichungen) mit $-\frac{i}{\hbar}$ und der Reihe nach mit $\Psi_3$, $-\Psi_4$, $-\Psi_1$ und $\Psi_2$ multipliziert und addieren dann die alle nach der Multiplikation so gewonnenen Gleichungen. Der Grund dafür, warum wir nun eine andere Reihenfolge der Wellenfunktionen (Faktoren) nehmen, mit der wir die einzelnen Gleichungen multiplizieren, als in der *Dirac*schen Theorie, ergibt sich, wenn wir die Sache etwas näher betrachten. In der *Dirac*schen Theorie entspricht nàmlich die Reihenfolge der Wellenfunktionen (Multiplikatoren) der an die Einheitsmatrix sich anschliessenden Wellenfunktionen, und hier der Matrix $\xi$.

Man würde also auf diese Weise erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_k\beta_1\Psi_k+\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_k\beta_2\Psi_k+\frac{\partial}{\partial z}\sum_{k=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_k\beta_3\Psi_k$$
$$+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_k\Psi_k=0. \tag{12 d}$$

Wir sind also von dem an die $\alpha$-Gruppe der Matrizen sich anschliessenden Gleichungssystem (12 *b*) ausgegangen und sind zu der *Dirac*schen mittels der $\beta$-Gruppe der Matrizen ausgedrückten Kontinuitätsgleichung gelangt.

Der antihermitische Produkt $\xi$ hermitischer Matrizen gemäss der Gleichung (7 *b*), wenn diese Matrizen die Bedingung (7 *a*) befriedigen, spielt also einigermassen die Rolle der " Kopplungsmatrix " zwischen den beiden *Dirac*schen Matrizensysteme $\alpha_r$ und $\beta_r$.

Auf die ganze andere Ableitung des magnetischen Moments des Elektrons, da sie vollkommen analog derjenigen ist, die schon aus der *Dirac*schen Theorie bekannt ist,[6] können wir selbstverständlich verzichten.

## 5. Andere Ableitungen

Mit Rücksicht darauf, was unter 3 gesagt ist, kann man auch die Ableitung des Spins, die Ungültigkeit des Theorems von *Ehrenfest*, die *Schrödinger*schen Oszillationen, die Feinstruktur der *Balmer*linien usw. ableiten.

Auf Grund alles dessen kann man also wohl den Schluss ziehen, dass die *Dirac*sche Linearisation zwar nicht notwendig zur Erreichung der brauchbaren Gleichungen für das Elektron und das Positron ist, mit Ausnahme, wenn man alle Matrizen hermitisch verlangt. In diesem Falle scheint sie auch notwendig zu sein.

## 6. Nochmals über die Antihermitizität der Matrix $\xi$

Man könnte eventuell zu allen diesen Ableitungen den Einwand machen, dass die Matrix $\xi$ eine antihermitische Matrix ist und dass in der Quantenmechanik nur mit den hermitischen Matrizen zu operieren inst. Darauf muss man aber bemerken, dass man gerade auf diese Matrix $\xi$ stösst, wenn man mit den *Dirac*schen Matrizen

$$\frac{\alpha_1+\beta_1}{\sqrt{2}},\ \frac{\alpha_2+\beta_2}{\sqrt{2}},\ \frac{\alpha_3+\beta_3}{\sqrt{2}},\ \frac{\alpha_4+\beta_4}{\sqrt{2}}$$

auf *Dirac*sche Art und Weise arbeitet. Will man nämlich nun die Methode des Wellenpaketes für die Berechnung des magnetischen Moments des Elektrons auf die *Dirac*schen Gleichungen

$$\left\{\frac{h}{i}\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\alpha_2+\beta_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\alpha_3+\beta_3}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_4+\beta_4}{\sqrt{2}}m_0c+\frac{h}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Psi=0$$

anwenden, da braucht man mittels der Kombination der ersten und der dritten, dann der zweiten und der vierten Gleichung diejenigen Derivierten der Wellenfunktionen nach den Koordinaten eliminieren, die wir nicht als "primare" wählen wollen. Mathematisch viel einfacher und eleganter kann dies wohl durch die Multiplikation der letzten Gleichung von der linken Seite mit der Matrix

$$\xi_5=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix}\frac{\alpha_1+\beta_1}{\sqrt{2}}$$

erfolgen; man erhält so

$$\frac{\hbar}{i}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\right)+\xi_4m_0c+\frac{h}{ic}\,\xi_5\frac{\partial}{\partial t}\Big\}\Psi=0;$$

$\xi_r$ $(r=1, 2, 3, 4)$ bedeuten die durch die Multiplikation erhaltenen Matrizen.

Erst aus dieser Gleichung können wir dann nach bekannter Methode[7] zwei "sekundäre" Wellenfunktionen auf Grund der zwei "primären" Wellenfunktionen mit beliebig gewählten Amplituden konstanten berechnen.

Dieselbe Transformation gilt auch für die Vorbereitung, wenn wir die *Darwin*sche Methode[8] der Berechnung des magnetischen Moments des Elektrons in etwas geänderter Form anwenden wollen.

Wir können aber gleich bemerken, dass die hiesige Matrix $\xi_3=-\xi$ ist, also eine antihermitische Matrix, die also in der weiteren Ableitung auftaucht, obzwar die Anfangsgleichungen die rein *Dirac*schen waren.

Dass man hie und da in der *Dirac*schen Theorie auf eine Antihermitizität stossen kann, ist schon bekannt.[9]

*Zusammenfassung.* Es wird gezeigt, wie man mittels zwei Gruppen von vier (*Dirac*schen) Matrizen, welche der Bedingung (7 *a*) genügen, operieren kann, um die brauchbaren Gleichungen für das Elektron und das Positron

zu gewinnen. Die Bedingung (7 *a*) ist eine Art der erweiterten *Dirac*schen Bedingung aufzufassen, weil sie in die *Dirac*sche Bedingung übergeht, falls wir $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ voraussetzen; statt (7 *b*) soll man dann die Gleichung $\alpha_k^2 = 1$ schreiben.

## LITERATUR


1. P. A. M. Dirac .. *Die Prinzipien d. Quantenmechanik*, 1930, 253.
2. L. de Broglie .. *Une nouvelle théorie de la lumière*, 1940, **1**, 65; *Particules à spin*, 1943, 12.
3. ———— .. *La théorie du noyau*, 1945, **11**, 29.
4. Cl. Schaefer .. *Theoretische Physik*, 1937, **111–2**, 463.
5. A. Haas .. *Ibid.*, 1930, **11**, 369; *Materiewellen u. Quantenmechanik*, 1930, 182; 1934, 187.
6. L. de Broglie .. *L' électron magnétique*, 1934, 170–77; Cl. Schaefer .. *Theoret. Physik.*, 1937, **111–2**, 468–75.
7. Vgl. 6/ ..
8. V. S. Vrkljan .. *Rad Jugosl. akademije*, 1949, 276, 187–93.
9. L. de Broglie .. *Une nouvelle théorie de la lumière*, 1940, **1**, 133; *L' électron magnêtique*, 1934, 150-53.