# ÜBER DAS MAGNETISCHE MOMENT DES MESONS

By Von V. S. Vrkljan in Zagreb

Received January 4, 1949
(Communicated by Prof. B. S. Madhava Rao)

Bekanntlich wird dem Meson der Spin 1 und ein magnetisches Moment vom Betrage $\frac{\epsilon\hbar}{2\mu_0 c}$ zugeschrieben, wo $\epsilon$ die Ladung und $\mu_0$ die Masse des Mesons im Ruhezustand, während $\hbar$ die durch $2\pi$ dividierte *Planck*sche Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Bekanntlich wurden verschiedene Theorien für die Erklärung solcher Eigenschaften der Mesonen aufgestellt. Speziell wurde das magnetische Moment des Mesons im äusserem elektromagnetischen Felde z. B. von G. *Wentzel*[1]) berechnet. Ausserdem hat *L. de Broglie*[2]) die Methode der Verschmelzung (der Fusion) der Partikeln aufgestellt, mittels welcher er den Spin 1 erklären konnte[3]. Es fehlt aber—soweit mir bis jetzt bekannt—die Ableitung des magnetischen Momentes im Rahmen der *de Broglie*—schen Methode der Fusion und dies ist die Aufgabe dieser Abhandlung, wo gezeigt wird, wie man mittels der *Darwin*schen Methode der Wellenpakete das magnetische Moment des Mesons ausserhalb des Feldes deduzieren kann.

Als vierreihige quadratische hermitische Matrizen, auf die wir die Methode der Fusion der Matrizen anwenden werden, wählen wir

$$a_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad a_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad a_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad a_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

und überzeugen uns leicht, dass dieselben den *Diracschen* Bedingungen

$$a_\beta\, a_\gamma + a_\gamma\, a_\beta = 2\delta_{\beta\gamma}\cdot 1 \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

genügen. Diesen Matrizen entsprechende *Dirac*sche Gleichungen der beiden Partikeln, welche wir durch die Fusion zu einer Einheit verreinigt denken, lauten für die erste Partikel

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar}{i}\left\{i\frac{\partial\Psi'_4}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi'_3}{\partial y} + \frac{\partial\Psi'_3}{\partial z}\right\} - \frac{\mu_0}{2}c\Psi'_1 + \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi'_1}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\hbar}{i}\left\{\frac{\partial\Psi'_3}{\partial x} + \frac{\partial\Psi'_4}{\partial y} - i\frac{\partial\Psi'_4}{\partial z}\right\} - \frac{\mu_0}{2}c\Psi'_2 + \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi'_2}{\partial t} = 0 \qquad (3a) \\
&\frac{\hbar}{i}\left\{\frac{\partial\Psi'_2}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi'_1}{\partial y} + \frac{\partial\Psi'_1}{\partial z}\right\} + \frac{\mu_0}{2}c\Psi'_3 + \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi'_3}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\hbar}{i}\left\{-i\frac{\partial\Psi'_1}{\partial x} + \frac{\partial\Psi'_2}{\partial y} + i\frac{\partial\Psi'_2}{\partial z}\right\} + \frac{\mu_0}{2}c\Psi'_4 + \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\Psi'_1}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

und für die zweite Partikel

$$
\begin{aligned}
&\frac{\hbar}{i}\left\{i\frac{\partial \Psi''_4}{\partial x} - i\,\frac{\partial \Psi_3''}{\partial y} + \frac{\partial \Psi''_3}{\partial z}\right\} - \frac{\mu_0}{2}\, c\Psi''_1 + \frac{\hbar}{ic}\,\frac{\partial \Psi''_1}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\hbar}{i}\left\{\frac{\partial \Psi''_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_4''}{\partial y} - i\,\frac{\partial \Psi''_4}{\partial z}\right\} - \frac{\mu_0}{2}\, c\Psi''_2 + \frac{\hbar}{ic}\,\frac{\partial \Psi_2''}{\partial t} = 0 \qquad (3\,b) \\
&\frac{\hbar}{i}\left\{\frac{\partial \Psi''_2}{\partial x} + i\,\frac{\partial \Psi''_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1''}{\partial z}\right\} + \frac{\mu_0}{2}\, c\Psi''_3 + \frac{\hbar}{ic}\,\frac{\partial \Psi''_3}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\hbar}{i}\left\{-i\,\frac{\partial \Psi''_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi''_2}{\partial y} + i\,\frac{\partial \Psi''_2}{\partial z}\right\} + \frac{\mu_0}{2}\, c\Psi''_4 + \frac{\hbar}{ic}\,\frac{\partial \Psi''_4}{\partial t} = 0
\end{aligned}
$$

wo $\Psi_i'$ bzw. $\Psi_i''$ ($i. = 1, 2, 3, 4$) die Wellenfunktionen darstellen, welche der ersten bzw. der zweiten Partikel gehören. Die Masse beider Partikeln wird gleich genommen und im Ruhezustand mit $\frac{\mu_0}{2}$ bezeichent, da die ruhemasse der durch die Fusion gewonnenen Partikel mit $\mu_0$ bezeichnet wird. Als mittels der Fusion definierte quadratische hermitische Matrizen sechzehnter Ordnung wählen wir mit *L. de Broglie*[4] vier Matrizen $a_r$ und vier Matrizen $b_r$ ($r = 1, 2, 3, 4$), welche durch die Formeln (für die Elemente der Matrizen)

$$(a_r)_{ik,\,lm} = (a_r)_{il}\,\delta_{km} \qquad (b_r)_{ik.\,lm} = (a_r)_{km}\,\delta_{il} \tag{4}$$

definiert sind, wo $\delta_{km}$ (bzw. $\delta_{il}$) das bekannte Symbol von *Kronecker* bedeutet.

Bekanntlich kann man dann nach *L. de Broglie*[5] die statistiche Dichte $\gamma$ der elektrischen Ladung des Mesons durch die Gleichung

$$\gamma = \epsilon \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} \overset{*}{\Psi}_{ik}\, \frac{a_4 b_4}{2}\, \Psi_{ik} \tag{5}$$

und die statistische Dichte $\vec{j}$ des elektischen Stromes durch die Gleichung

$$\vec{j} = \epsilon c \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} \overset{*}{\Psi}_{ik}\, \frac{\vec{a} b_4 + \vec{b} a_4}{2}\, \Psi_{ik} \tag{6}$$

beschreiben. Zwar hat *L. de Broglie* nur die statistische Teilchendichte und die statistische Dichte des Teilchenstromes angegeben; für die geladenen Mesonen erhalten wir daraus durch die Multiplikation mit der Ladung des Mesons ($\epsilon = \pm e$) die oben angeführten Ausdrücke (5) und (6). Für das Neutretto ergeben die oben angeführten Ausdrücke = O. Hier bedeutet $\Psi_{ik}$ das Produkt der Wellenfunktion $\Psi_i'$ der ersten Partikel und der Wellenfunktion $\Psi_k''$ der zweiten Partikel. Der Unterschied im Vorzeichen zwischen der hiesigen Formel (6) und der Formel von *L. de Broglie* rührt davon her, dass hier in den *Dirac*schen Gleichungen die zeitliche Ableitung der Wellenfunktion gerade mit umgekehrten Vorzeichen als bei *L. de Broglie*[6] genommen ist.

Wir schreiben jetzt der ersten Partikel als die " grossen " Wellenfunktionen in der Form der *Darwin*schen Wellenpakete

$$\Psi'_{3,4} = A'_{3,4}\, e^{-\frac{(x-v_x t)^2+(y-v_y t)^2+(z-v_z t)^2}{2\sigma'^2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_y y+p_z z-Ut)} \qquad (7\,a)$$

zu, und der zweiten Partikel die " grossen " Wellenfunktionen

$$\Psi''_{3,4} = A''_{3,4}\, e^{-\frac{(x-v_x t)^2+(y-v_y t)^2+(z-v_z t)^2}{2\sigma''^2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_y y+p_z z-Ut)} \qquad (7\,b)$$

Hier bedeutet $\vec{p}$ den Impuls und U die Energie der ersten bzw. der zweiten Partikel, welche zusammen die durch die Fusion erzeugte Partikel ergeben, während $\sigma'$ (bzw. $\sigma''$) die " praktische " Ausdehnung des Wellenpaketes der ersten (bzw. der zweiten) Partikel bezeichnet. Die (zwei) " kleinen " Wellenfunktionen der ersten Partikel ergeben sich dann aus den ersten zwei Gleichungen (3*a*) und die " kleinen " Wellenfunktionen der zweiten Partikel ergeben sich aus den ersten zwei von den vier Gleichungen (3*b*). Von den Produkten $\overset{*}{\Psi}_{ik} \frac{\vec{a}b_4 + \vec{b}a_4}{2} \Psi_{ik} = \overset{*}{\Psi}_i \overset{*}{\Psi}''_k \frac{\vec{a}b_4 + \vec{b}a_4}{2} \Psi'_i \Psi''_k$ in der Gleichung (6) können wir aber in *Newton*scher Näherung alle diejenigen streichen, in welchen mehr als ein Faktor eine " kleine " Wellenfunktion auftritt, also in welchen unter den Indexen i, *k*, *l*, *m* mehr als ein Index kleiner als 3 auftritt.

Jetzt berechen wir auf Grund der Gleichungen (6) und (3*a*, *b*) die einzelnen Ausdrücke $\overset{*}{\Psi}_{ik} \frac{\vec{a}b_4 + \vec{b}a_4}{2} \Psi_{ik}$; wir erhalten so für langsame Geschwindigkeiten des Mesons (*d. h.* in *Newton*scher Näherung: $\vec{p} \doteq \frac{\mu_0}{2}\vec{v}$, $U \doteq \frac{\mu_0}{2} c^2$) und für $t = 0$ *z.* B. für die Produkte, welche im Ausdruck für die *x*-Komponente der statistischen Dichte des elektrischen Stromes auftreten

$$i\, \overset{*}{\Psi}_{31} \Psi_{34} = \frac{1}{\mu_0 c}\, \overset{*}{A}_3{}' A_3{}' A_4{}'' \, (\overset{*}{A}_4{}'' p_x - \overset{*}{A}_3{}'' p_y + i\, \overset{*}{A}_3{}'' p_z +$$

$$\hbar\, \frac{-i\, \overset{*}{A}_4{}'' x + i\, \overset{*}{A}_3{}'' y + \overset{*}{A}_3{}'' z}{\sigma''^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{\sigma'^2}+\frac{1}{\sigma''^2}\right)} \qquad (8)$$

*u. s. w.*

Durch Einführung der Ausdrücke (8) in (6) erhält man

$$j_x = \Big\{\frac{2\epsilon}{\mu_0}(\overset{*}{A}_3{}'A_3{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_4{}')(\overset{*}{A}_3{}''A_3{}'' + \overset{*}{A}_4{}''A''_4)p_x +$$

$$+ \frac{\epsilon\hbar}{\mu_0}\, i\Big[\overset{*}{A}_3{}'A_3{}'(\overset{*}{A}_3{}''A_4{}'' - \overset{*}{A}_4{}''A_3{}'') + \overset{*}{A}_4{}''A_4{}''(\overset{*}{A}_3{}'A_4{}' - A_4{}'\overset{*}{A}_3{}')\Big]\frac{y}{\sigma'^2} +$$

$$+ \frac{\epsilon\hbar}{\mu_0}\, i\Big[\overset{*}{A}_3{}''A_3{}''(\overset{*}{A}_3{}'A_4{}' - \overset{*}{A}_4{}'A_3{}') + \overset{*}{A}_4{}'A_4{}'(\overset{*}{A}_3{}''A_4{}'' - \overset{*}{A}_4{}''A_3{}'')\Big]\frac{y}{\sigma''^2} -$$

$$- \frac{\epsilon\hbar}{\mu_0}\Big[-\overset{*}{A}_3{}'A_3{}'(\overset{*}{A}_3{}''A_4{}'' + \overset{*}{A}_4{}''A_3{}'') - \overset{*}{A}_4{}''A_4{}''(\overset{*}{A}_3{}'A_1{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_3{}')\Big]\frac{z}{\sigma'^2} -$$

$$- \frac{\epsilon\hbar}{\mu_0}\Big[-\overset{*}{A}_3{}''A_3{}''(\overset{*}{A}_3{}'A_4{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_3{}') - \overset{*}{A}_4{}'A_4{}'(\overset{*}{A}_3{}''A_4{}'' + \overset{*}{A}_4{}''A_3{}'')\Big]\frac{z}{\sigma''^2}\Big\} \times$$

$$\times\, e^{-(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{\sigma'^2} + \frac{1}{\sigma''^2}\right)} \qquad (9)$$

Setzen wir jetzt voraus, dass $\sigma' = \sigma'' = \sigma$ ist, was um so mehr wahrscheinlich ist, da den beiden Partikeln nach *L. de Broglie* die gleiche Masse zugeschrieben wird, und beachten wir noch, dass

$$\frac{y}{\sigma^2}\, e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y}\, e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}, \textit{ u.s.w.},$$

so erhalten wir aus der Gleichung (9) endlich die x-Komponente der statistischen Dichte des elektrischen Stromes. Eine völlig analoge Rechnung, welche der Kürze halber ausbleiben kann, führt von (6) zu zwei anderen Komponenten der statistischen Dichte des elektrischen Stromes (*d.h.* zu $j_y$ und $j_z$).

Aus den Gleichungen für $j_x$, $j_y$ und $j_z$ könnten wir in analoger Weise schliessen, wie dies aus der Ableitung des magnetischen Momentes des Elektrons (bzw. des Positrons) mittels der *Darwin*schen Methode des Wellenpaketes bekannt ist,[7] dass:

$$M_x = \frac{\epsilon\hbar}{4\mu_0 c}\Big\{(\overset{*}{A}_3{}'A_3{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_4{}')(\overset{*}{A}_3{}''A_3{}'' - \overset{*}{A}_4{}''A_4{}'') +$$

$$+ (\overset{*}{A}_3{}''A_3{}'' + \overset{*}{A}_4{}''A_4{}'')(\overset{*}{A}_3{}'A_3{}' - \overset{*}{A}_4{}'A_4{}')\Big\}\int e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}\, dt$$

$$M_y = \frac{\epsilon\hbar}{4\mu_0 c}\Big\{(\overset{*}{A}_3{}'A_3{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_4{}')(\overset{*}{A}_3{}''A_4{}'' + \overset{*}{A}_4{}'A_3{}'') +$$

$$+ (\overset{*}{A}_3{}''A_3{}'' + \overset{*}{A}_4{}''A_4{}'')(\overset{*}{A}_3{}'A_4{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_3{}')\Big\}\int e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}\, dt \qquad (10)$$

$$M_z = \frac{\epsilon\hbar}{4\mu_0 c}\cdot i\Big\{(\overset{*}{A}_3{}'A_3{}' + \overset{*}{A}_4{}'A_4{}')(\overset{*}{A}_4{}''A_3{}'' - \overset{*}{A}_3{}''A_4{}'') +$$

$$+ (\overset{*}{A}_3{}''A_3{}'' + \overset{*}{A}_4{}''A_4{}'')(\overset{*}{A}_4{}'A_3{}' - \overset{*}{A}_3{}'A_4{}')\Big\}\int e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}\, dt$$

ist, wo sich die Integrale auf den ganzen Raum erstrecken. Um die Integrale aus diesen Formeln wegzuschaffen, müssen wir die Normierung mittels der Gleichung (5) für die statistische Dichte der elektrischen Ladung des Mesons ausführen. Unter Anwendung der Matrizen (4) mit Rücksicht auf (1) ergibt die Formel (5)

$$\rho = \epsilon\Big(-\dot{\Psi}_{11}\dot{\Psi}_{11} - \Psi_{21}\dot{\Psi}_{21} - \dot{\Psi}_{12}\Psi_{12} - \dot{\Psi}_{22}\Psi_{22} + \dot{\Psi}_{33}\Psi_{33} + \\ + \dot{\Psi}_{43}\Psi_{43} + \dot{\Psi}_{34}\Psi_{34} + \dot{\Psi}_{44}\Psi_{44}\Big) \qquad (11)$$

Von den acht Gliedern auf der rechten Seite können wir hier die erste vier Produkte $\dot{\Psi}_{ik}\,\Psi_{lm}$ streichen, weil sie mit Bezug auf die letzten vier Produkte die lauter "kleinen" Wellenfunktionen ($\Psi_1$ oder $\Psi_2$) enthalten. Unter Beachtung der Ausdrücke für die " grossen " Wellenfunktionen (7 *a*) und (*fb*) ausgedrückt durch die *Darwin*schen Wellenpakete erhalten wir noch unter der schon erwähnten Voraussetzung $\sigma' = \sigma'' = \sigma$ leicht aus (11)

$$\int \rho\, dt = \epsilon\,(\dot{A}_3'A_3' + \dot{A}_4'A_4')\,(\dot{A}_3''A_3'' + \dot{A}_4''A_4'')\, e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}\, dt = \epsilon \qquad (12\,a)$$

oder zuletzt

$$\int e^{-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}\, dt = \frac{}{(\dot{A}_3'A_3' + \dot{A}_4'A_4')\,(\dot{A}_3''A_3'' + \dot{A}_4''A_4'')} \qquad (12\,b)$$

Dies in die Gleichungen (10) eingeführt, ergibt dann sofort die drei Ausdrücke für die Komponenten des magnetischen Momentes des Mesons, aus welchen man durch Quadrieren und Summieren leicht erhält

$$|\,\mathrm{M}\,| = \frac{|\,\epsilon\,| \cdot \hbar}{2\mu_0 c}, \qquad (13)$$

wenn man in dem zweifachen Produkt

$$2\,(\dot{A}_3'A_3' + \dot{A}_4'A_4')\,(\dot{A}_3''A_3'' + \dot{A}_4''A_4'')\,[\dot{A}_3''A_3''\dot{A}_3'A_3' + \\ + \dot{A}_3''\dot{A}_4'\,(2\,A_4''A_3' - A_3''A_4') + \dot{A}_4''\dot{A}_3'\,(2A_3''A_4' - A_4''A_3') + \\ + \dot{A}_4''A_4''\dot{A}_4'A_4']$$

welcher in den weggelassenen Zwischenrechnungen vorkommt,

$$\frac{A_3'}{A_4'} = \frac{A_3''}{A_4''} \qquad (14)$$

voraussetzt. Dass eine solche Voraussetzung hier annehmbar erscheint, geht schon aus dem Grunde hervor, weil den beiden Partikeln, die sich mittels der Fusion zu einer Einheit vereinigen, die gleiche Masse zugeschrieben wird.

Es erscheint also, dass die *de Broglie*-sche Methode der Fusion der Partikeln (zur Erklärung der Eigenschaften des Mesons und besonders des Spins 1) von grösserer Bedeutung ist als ihr bis jetzt- wie es mir scheint—zugeschrieben wurde. Dasselbe gilt auch für die *Darwin*sche Methode des Wellenpaketes.

*Zusammenfassung.*—Es wird gezeigt, wie man mittels Anwendung zweier Methoden: der *de Broglie*-schen Methode der Fusion der Partikeln und der *Darwin*schen Methode des Wellenpaketes das magnetische Moment des Mesons ableiten kann.

## LITERATUR.

1. G. Wentzel .. *Quantenth. d. Wellenfelder*, 1943, S. 89.
2. L. *de* Broglie .. *Particules à spin*, 1943, S. 97, ff.
   .. *La théorie du noyau*, 1945, II, S. 66.
3. ———— .. *Particules à spin*, 1943, S. 131.
4. ———— .. *Ibid.*, 1943, S. 101.
5. ———— .. *Ibid.*, 1943, S. 117.
6. ———— .. *Ibid.*, 1943, S. 100.
7. ———— .. *L'Electron magnétique*, 1934, S. 173–77.
   *Cl.* Schaefer .. *Theor. Physik*, 1937, III–2, S. 471–72.

383-49 Printed at The Bangalore Press, Mysore Road, Bangalore City, by G. Srinivasa Rao, Superintendent and Published by The Indian Academy of Sciences, Bangalore.