Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol. 90, Number 3, July 1981, pp. 219–227.

Analyse asymptotique des équations de Transport dans le cas d'évolution

RAFAEL F SANTOS
Departement de Mathematiques, Université de Paris XIII, 93430 Villetaneuse, France

MS received 15 December 1980

Abstract. Nous demontrons la convergence de la solution d'une équation de Transport vers la solution d'une équation de Diffusion quand le libre parcours moyen tend vers zéro, pour des équations d'évolution et un domaine borné dans deux cas: flux incident nul et réflexion spéculaire.

Keywords Transport equations; diffusion approximation; Fredholm alternative; boundar layers.

1. Introduction

Soit X un ouvert régulier dans R^3 et S^2 la sphère unitaire. On désigne par ∂X la frontière de X et par $\nu = \nu(x)$ la normale extérieure à X, au point $x \in \partial X$.

Considerons l'équation de Transport, dans $[0, T] \times X \times S^2$,

$$(1) \qquad \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{v \cdot \nabla u^\epsilon}{\epsilon} + \frac{(1-\epsilon^2\gamma)}{\epsilon^2}\sigma(x)\, u^\epsilon - \frac{\sigma(x)}{\epsilon^2}\int_{S_2} f(x, v, v')\, u^\epsilon(t, x, v')\, dv' = 0$$

et soit $\Gamma^- = \{(x, v) \in \partial X \times S^2 : \nu \cdot v < 0\}$.

On se propose, dans les conditions que l'on précisera dans la suite, de construire un developpement asymptotique de u^ϵ, dans un voisinage de $\epsilon = 0$.

Ceci a été fait dans l'espace entier par Benssoussan, Lions et Papanicolaou [1]. Dans le cas d'un ouvert borné, donc d'un problème aux limites, ces auteurs n'ont étudié que le problèeme stationnaire, γ étant de signe constant lorsqu'ils considérent sur le bord des conditions de réflexion. Nous étudions le cas d'évolution avec deux types de conditions aux limites : absence de flux rentrant et réflexion spéculaire. Alors nous pouvons prendre γ positif ou négatif.

Dans le paragraphe 2 on considère que la condition aux limites est $u^\epsilon|_{\Gamma^-} = 0$ (c'est-à-dire, une absence de flux incident). Pour ce problème on construit le terme d'ordre zéro comme solution d'une équation de Diffusion pulle sur le bord.

Pour le correcteur d'ordre un, outre un terme à l'intérieur on a besoin de deux termes de plus : un de couche initiale, que l'on obtient en étendant le temps et un autre de couche limite que l'on obtient en étendant les coordonnées spaciales au voisinage du bord. Un bon choix de la donnée initiale nous permet de se passer d'un éventuel terme de couche à la fois initiale et limite.

Au paragraphe 3 on montre que lorsque l'on considère la réflexion spéculaire, le premier terme du developpement vérifie une équation de Diffusion avec une condition de Neumann sur le bord.

Dans toute la suite nous supposons que

(i) σ est une fonction suffisement régulière dans X et vérifie $0 < m \leqslant \sigma \leqslant M$.

(ii) f est une fonction mesurable, bornée, suffisement régulière en $x \in X$, strictement positive et vérifie la condition de normalisation

$$\int_{S^2} f(x, v, v')\, dv' = \int_{S^2} f(x, v, v')\, dv = 1.$$

On pose K l'opérateur défini par

$$K\varphi = \int_{S^2} f(x, v, v')\, \varphi(v')\, dv' \text{ et}$$

$$Q\varphi = \sigma [I - K]\, \varphi.$$

On note $|\ \ |_0$ la norme dans $L^\infty (X \times S^2)$ et pour $g, h \in L^2(S^2)$ on pose

$$(g, h) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} g(v)\, h(v)\, dv.$$

2. On suppose que σ et f ne dépendent que de la première composante de x, que l'on note encore x, et que $x \in [0, 1]$ (a fin de simplifier les notations de couche limite on prend pour X une bande, *cf.* [4]). Donc

$$\Gamma^- = \{(0, v) : v_1 > 0\} \cup \{(1, v) : v_1 < 0\} \equiv \Gamma_0^- \cup \Gamma_1^-.$$

On note T_ϵ l'opérateur défini par

$$D(T_\epsilon) = \left\{ u \in C(X \times S^2) : v_1 \frac{\partial u}{\partial x} \in C(X \times S^2) \right\},$$

$$T_\epsilon u = \frac{v_1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Qu}{\epsilon^2} - \gamma\sigma u.$$

D'après l'interpretation probabiliste des processus de Transport et suivant [2] on a le

LEMME 1 : La solution de

$$\frac{du}{dt} + T_\epsilon u = p$$

$$u|_{\Gamma^-} = g$$

$$u(0) = h$$

vérifie $| u(t) |_0 \leqslant e^{\sup(\gamma\sigma)\, t} \sup(| p |_0, | g |_0, | h |_0)$.

THEOREME 1 : Soient φ_0, φ_1 telles que $\varphi_0 \in C_c^\infty(X)$, $\varphi_1(.,v) \in C^\infty(\bar{X})$, $\varphi_1(.,v)|_{\partial_\infty} = 0$, $\varphi_1(x,.) \in L^1(S^2)$. Alors la solution de

$$(2) \qquad \frac{du^\epsilon}{dt} + T_\epsilon u^\epsilon = 0,$$

$$(3) \qquad u^\epsilon|_{\Gamma^-} = 0,$$

$$(4) \qquad u^\epsilon(0) = \varphi_0(x) + \epsilon\varphi_1(x,v),$$

vérifie $$u^\epsilon(t,x,v) = u_0(t,x) + \epsilon\Big[u_1(t,x,v) + u_1^I\Big(\frac{t}{\epsilon^2}, x, v\Big) + \sum_{\alpha=0}^{1} u_{1,\alpha}^{CL}(t,\xi_\alpha,v)\Big] + \omega_\epsilon, \quad \xi_0 = \frac{x}{\epsilon}, \; \xi_1 = \frac{1-x}{\epsilon}.$$

De plus, il existe un constante $C > 0$, indépendante de ϵ, telle que, pour $t \in [0,T]$, on ait $|\omega_\epsilon(t)|_0 \leqslant \epsilon^2 C e^{\gamma_0 t}$, $\gamma_0 = \sup(\sup(\gamma\sigma), 0)$.

Démonstration : On écrit

$$u^\epsilon(t,x,v) = \psi^\epsilon\Big(t, \frac{t}{\epsilon^2}, x, \xi_0, \xi_1, v\Big) + u^I\Big(\frac{t}{\epsilon^2}, x, v\Big) + u_0^{CL}(t,\xi_0,v) + u_1^{CL}(t,\xi_1,v)$$

avec $\psi^\epsilon \in C(\mathbf{R}_+^2 \times [0,1] \times \mathbf{R}^2 \times S^2)$, $u^I \in C(\mathbf{R}_+ \times [0,1] \times S^2)$,

$u_\alpha^{CL} \in C(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times S^2)$

et on pose

$$(5) \qquad \psi^\epsilon = \sum_{k=0}^{3} \epsilon^k u_k + \omega_\epsilon, \quad u^I = \sum_{k=1}^{3} \epsilon^k u_k^I, \quad u_\alpha^{CL} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon^k u_{k,\alpha}^{CL}.$$

Soit $\zeta = t/\epsilon^2$. Le problème (2), (3), (4) devient

$$(6.1) \qquad \frac{\partial\psi^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial\psi^\epsilon}{\partial\zeta} + \frac{v_1}{\epsilon}\frac{\partial\psi^\epsilon}{\partial x} + \frac{v_1}{\epsilon^2}\Big[\frac{\partial\psi^\epsilon}{\partial\xi_0} - \frac{\partial\psi^\epsilon}{\partial\xi_1}\Big] + \frac{1}{\epsilon^2}Q\psi^\epsilon - \gamma\sigma\psi^\epsilon = 0,$$

$$(6.2) \qquad \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial u^I}{\partial\zeta} + \frac{v_1}{\epsilon}\frac{\partial u^I}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon^2}Qu^I - \gamma\sigma u^I = 0,$$

$$(6.3) \qquad \frac{\partial u_\alpha^{CL}}{\partial t} + (-1)^\alpha\frac{v_1}{\epsilon^2}\frac{\partial u_\alpha^{CL}}{\partial\xi_\alpha} + \frac{1}{\epsilon^2}Q^\alpha u_\alpha^{CL} - \gamma\sigma u_\alpha^{CL} = 0,$$

$$(7.1) \qquad \psi^\epsilon(t,\zeta,0,0,1/\epsilon,v) + u^I(\zeta,0,v) + u_0^{CL}(t,0,v) + u_1^{CL}(t,1/\epsilon,v) = 0,$$

$$(7.2) \qquad \psi^\epsilon(t,\zeta,1,1/\epsilon,0,v) + u^I(\zeta,1,v) + u_0^{CL}(t,1/\epsilon,v) + u_1^{CL}(t,0,v) = 0,$$

$$(8) \qquad \psi^\epsilon(0,0,x,\xi_0,\xi_1,v) + u^I(0,x,v) + u_0^{CL}(0,\xi_0,v) + u_1^{CL}(0,\xi_1,v) = \varphi_0(x) + \epsilon\varphi_1(x,v),$$

où Q^α est l'opérateur Q lorsque $x = \xi_\alpha$. On reporte (5) dans (6). A l'intérieur on obtient les equations

$$(9) \qquad Qu_0 = 0,$$

$$(10) \qquad Qu_1 = -v\frac{\partial u_0}{\partial x},$$

$$(11) \qquad Qu_2 = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - \gamma\sigma u_0\right],$$

$$(12) \qquad Qu_3 = -\left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial u_2}{\partial x} - \gamma\sigma u_1\right].$$

Compte tenu des hypothèses sur f (positivité et condition de normalisation) on déduit de l'équation (9) que u_0 ne depend pas de $v : u_0 = u_0(t, x)$. D'autre part, 1 est la mesure sur S^2 invariante pour le semigroupe engendré par Q. Ainsi, en vertu de l'alternative de Fredholm, on déduit que

$$u_1 = D(x, v)\frac{\partial u_0}{\partial x} + c_1(t, x)$$

où $D(x, v)$ est défini par $QD + v_1 = 0$, $(D, 1) = 0$. En appliquant à nouveau l'alternative de Fredholm on montre qu'il faut et qu'il suffit que $u_0(t, x)$ et $c_1(t, x)$ vérifient dans $[0, T] \times X$, respectivement,

$$(13) \qquad \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(v_1, D(x, v))\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \gamma\sigma u_0 = 0$$

$$(14) \qquad \frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(v_1, D(x, v))\frac{\partial c_1}{\partial x}\right] - \gamma\sigma c_1 = -\left(v_1, \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

(où $g(t, x, v)$) verifie

$$Qg = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial x}D(x, v)\frac{\partial u_0}{\partial x} - \gamma\sigma u_0\right]$$

pour que les équations (11) et (12) aient une solution et

$$u_2 = g(t, x, v) + D(x, v)\frac{\partial c_1}{\partial x} + c_2(t, x).$$

Pour avoir les conditions aux limites et initiale pour $u_0(t, x)$ on tient compte des équations (7) et (8). On en déduit que l'on doit avoir

$$(15) \qquad u_0(t, x) = 0, \text{ sur } [0, T] \times \partial X,$$

$$(16) \qquad u_0(t, x) = \varphi_0(x), \text{ dans } X,$$

Comme l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(v_1, D(x, v))\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

est uniformément elliptique [3], il existe une unique u_0, suffisement régulière, solution de (13), (15), (16). Les conditions aux limites et initiale pour $c_1(t, x)$ seront obtenues d'après les termes $u_{1,\alpha}^{CL}$ et u_1^I.

Pour les termes de couche initiale on obtient de (6.2) les équations

$$(17) \qquad \frac{\partial u_1^I}{\partial \zeta} + Qu_1^I = 0,$$

(18) $$\frac{\partial u_2^I}{\partial \zeta} + Qu_2^I = - v_1 \frac{\partial u_1^I}{\partial x},$$

(19) $$\frac{\partial u_3^I}{\partial \zeta} + Qu_3^I = - v_1 \frac{\partial u_2^I}{\partial x} + \gamma\sigma u_1^I.$$

Outre (17) u_1^I doit verifier, à l'instant zéro

(20) $$u_1^I(0, x, v) + u_1(0, x, v) = \phi_1(x, v),$$

et la condition de couche initiale

(21) $$u_1^I(\zeta, ., .) \to 0, \quad \zeta \to +\infty.$$

D'autre part, pour les termes de couche limite on obtient

(22) $$(-1)^\alpha v_1 \frac{\partial u_{1,\alpha}^{CL}}{\partial \xi_\alpha} + Q^\alpha u_{1,\alpha}^{CL} = 0,$$

(23) $$(-1)^\alpha v_1 \frac{\partial u_{2,\alpha}^{CL}}{\partial \xi_\alpha} + Q^\alpha u_{2,\alpha}^{CL} = 0,$$

(24) $$(-1)^\alpha v_1 \frac{\partial u_{3,\alpha}^{CL}}{\partial \xi_\alpha} + Q^\alpha u_{3,\alpha}^{CL} = \gamma\sigma u_{1,\alpha}^{CL} - \frac{\partial u_{1,\alpha}^{CL}}{\partial t},$$

les $u_{1,\alpha}^{CL}$ verifiant

(25) $$u_{1,\alpha}^{CL}(t, 0, v) + u_1(t, a, v) = 0,$$

(26) $$u_{1,\alpha}^{CL}(., \xi_\alpha, .) \to 0, \quad \xi_\alpha \to +\infty.$$

Les fonctions $u_{1,\alpha}^{CL}$ et u_1^I sont donc complètement déterminées si on applique les lemmes suivants ([1]) :

Lemme 2 : Soit $g(\zeta, .)$ telle que $|g(\zeta, .)| \leqslant C_1 \exp(-\delta\zeta)$. Alors pour toute constante C il existe u, solution unique de

$$\frac{du}{d\zeta} + Qu + g = 0,$$

$$u(0) = g_0 + C.$$

De plus on a $u(\zeta) \to (g_0, 1)$ si $g = 0$ et $C = 0$ et il existe une unique C telle que $u(\zeta) \to 0$, de facon exponnentielle, lorsque $\zeta \to +\infty$.

Lemme 3 : (a) Il existe p_α, mesure sur Γ_α^- telle que la solution de

$$v_\alpha \cdot v \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + Q^\alpha u = 0,$$

$$u(0, .)|_{\Gamma_\alpha^-} = h_0,$$

verifie $u(\xi_\alpha, .) \to (p_\alpha, h_0)$, de façon exponnentielle, lorsque $\xi_\alpha \to +\infty$.

(b) Si $h(\xi_\alpha, .)$ verifie $|h(\xi_\alpha, .)| \leqslant C_1 \exp(-\beta\xi_\alpha)$, alors pour toute constante C il existe u solution unique de

$$v_\alpha \cdot v \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + Q^\alpha u + h = 0,$$

$$u(0, .)|_{\Gamma_\alpha^-} = h_0 + C,$$

et il existe une unique C telle que $u(\xi_a, .) \to 0$, de façon exponentielle, quand $\xi_a \to +\infty$.
Ainsi, d'après le lemme 2, pour que l'on ait (21), il faut que $(\varphi_1(x, .) - u_1(0, x, .), 1) = 0$ c'est-a-dire

$$\left(\varphi_1(x, .) - D(x, .)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_1(0, x), 1\right) = 0.$$

Ceci determine la condition initiale pour $c_1(t, x)$:

(27) $\quad c_1(0, x) = (\varphi_1(x, .), 1).$

Le Lemme 3 et (26) entraînent

$$(u_1(t, a, .), p_a) = \left(c_1(t, a) + D(a, .)\frac{\partial u_0}{\partial x}(t, a), p_a\right) = 0,$$

donc

(28) $\quad c_1(t, a) = -(D(a, .), p_a)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}(t, a),$

et $c_1(t, x)$ est determiné par (14), (27) et (28). Quitte à preciser les conditions initiales et aux limites les lemmes 2 et 3 nous assurent l'existence des termes d'ordre 2 et 3.

Soit $\omega^\epsilon(t, x, v) = \omega_\epsilon(t, \zeta, x, \xi_0, \xi_1, v)$; ω^ϵ est solution de

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega^\epsilon}{\partial t} + T_\epsilon \omega^\epsilon = \epsilon^2\left[-\frac{\partial u_2}{\partial t} - v_1\frac{\partial u_3}{\partial x} + \gamma\sigma u_2\right] + \epsilon^3\left[-\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma\sigma u_3\right] \\
&\qquad = O(\epsilon^2) \\
&\omega^\epsilon|_{\Gamma^-} = R, \\
&\omega^\epsilon(0) = R_0
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R(a) &= u^\epsilon(t, a, v) - u_0(t, a) - \epsilon\,[u_1(t, a, v) + u_1^I(\zeta, a, v) \\
&\quad + \sum_{\alpha=0}^{1} u_{1,\alpha}^{CL}(t, 0, v)] + O(\epsilon^2), \\
&= -\epsilon u_1^I(\zeta, a, v) + O(\epsilon^2) = O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_0 &= u^\epsilon(0, x, v) - u_0(0, x) - \epsilon\,[u_1(0, x, v) + u_1^I(0, x, v) \\
&\quad + \sum_{\alpha=0}^{1} u_{1,\alpha}^{CL}(0, \xi_\alpha, v)] + O(\epsilon^2) \\
&= -\epsilon\sum_{\alpha=0}^{1} u_{1,\alpha}^{CL}(0, \xi_\alpha, v) + O(\epsilon^2) = O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

En effet on a $u_1^I(\zeta, a, v) = 0$ et $u_{1,\alpha}^{CL}(0, \xi_\alpha, v) = 0$.
D'après le lemme 1 on a, pour

$$t \in [0, T],\ |\omega^\epsilon(t)|_0 \leqslant \epsilon^2 C \exp[\sup(\gamma\sigma)t]$$

et on conclut.

3. On suppose que X est borné et qu'il represente un milieu isotrope, donc que f est constante. On défini T_ϵ par

$$D(T_\epsilon) = \{u \in C(X \times S^2) : v \,.\, \nabla u \in C(X \times S^2)\},$$

$$T_\epsilon u = \frac{v \,.\, \nabla u}{\epsilon} + \frac{Qu}{\epsilon^2} - \gamma\sigma u$$

et $R : \Gamma_x^+ \to \Gamma_x^-$ par $R\phi(x, v) = \phi(x, v - (2\nu \,.\, v)\,\nu)$.

THEOREME 2: Soit ϕ_0 une fonction régulière dans $\bar{X}$ verifiant $\partial\phi_0/\partial\nu = 0$ sur ∂X. Alors la solution de

(29) $$\frac{du^\epsilon}{dt} + T_\epsilon u^\epsilon = 0,$$

(30) $$u^\epsilon(t, x, v)\,|_{\Gamma^-} = R\,[u^\epsilon(t, x, v)\,|_{\Gamma^+}],$$

(31) $$u^\epsilon(0) = \phi_0(x),$$

verifie $u^\epsilon(t, x, v) = u_0(t, x) + \omega^\epsilon$. De plus, pour tout $\beta > 0$, il existe une constante positive $C = C(\beta)$ independante de ϵ telle que pour $t \in [0, T]$, on ait

$$|\,\omega^\epsilon(t)\,|_0 \leqslant \epsilon C \exp\,[(\gamma_0 + \beta)\,t], \quad \gamma_0 = \sup(\sup(\gamma\sigma), 0).$$

Démonstration : Posons

(32) $$u^\epsilon(t, x, v) = u_0(t, x) + \epsilon u_1(t, x, v) + \epsilon^2 u_2(t, x, v) + \omega^\epsilon,$$

et reportons (32) dans (29). On trouve

(33) $$Qu = 0,$$

(34) $$Qu = -\,v \,.\, \nabla u_0,$$

(35) $$Qu = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + v \,.\, \nabla u_1 - \gamma\sigma u_0\right].$$

En raisonnant comme dans la demonstration du théorème 1 on déduit que u_0 ne dépend pas de v, que, d'après l'alternative de Fredholm $u_1 = -\,v \,.\, \nabla u_0 + c_1(t, x)$ et que u_0 satisfait dans $[0, T] \times X$ l'équation

(36) $$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{1}{3}\,\Delta u_0 - \gamma\sigma u_0 = 0,$$

u_2 étant donnée par

$$u_2 = -\,\frac{\partial u_0}{\partial t} + v \,.\, \nabla u_1 - \gamma\sigma u_0 + c_2(t, x).$$

En reportant (32) dans (30) on trouve à l'ordre un que

$$v \,.\, \nabla u_0 = (v - (2\nu \,.\, v)\,\nu) \,.\, \nabla u_0 \text{ et donc}$$

(37) $$\partial u_0/\partial\nu = 0, \quad \text{sur } [0, T] \times \partial X.$$

Finalement (31) entraîne

(38) $$u_0(0, x) = \phi_0(x)$$

Les équations (36)–(38) determinent u_0 de façon unique.

On a $|\omega^\epsilon|_0 \leqslant \omega_\epsilon$ où ω_ϵ satisfait

$$\frac{d\omega_\epsilon}{dt} + T_\epsilon \omega_\epsilon = \epsilon \left| -\frac{\partial u_1}{\partial t} - v \cdot \nabla u_2 + \gamma\sigma u_1 \right| + \epsilon^2 \left| -\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma\sigma u_2 \right| \equiv h^\epsilon$$

$$h^\epsilon = O(\epsilon),$$

$$\omega_\epsilon|_{\Gamma^-} = R[\omega_\epsilon|_{\Gamma^+}] + \epsilon f^\epsilon, \qquad f^\epsilon = O(\epsilon),$$

$$\omega_\epsilon(0) = g^\epsilon, \qquad g^\epsilon = O(\epsilon).$$

Lemme 4 : Pour tout $a > 0$ il existe une constante $C(a)$ telle que la solution de

$$\frac{du}{dt} + \frac{v \cdot \nabla u}{\epsilon} + \frac{Qu}{\epsilon^2} + au = 0 \qquad Q1 = 0,$$

$$u|_{\Gamma^-} = R[u|_{\Gamma^+}] + \epsilon p^\epsilon \qquad R1 = 1,$$

$$u(0) = q^\epsilon$$

verifie $\quad |u(t)|_0 \leqslant \exp(-at)\,|q^\epsilon|_0 + C(a)\,|p^\epsilon|_0.$

Idée de la démonstration : on tient compte de la description probabiliste pour écrire

$$u(t, x, v) = E_{x,v}\{e^{-at} q^\epsilon + \int_0^t e^{-as} p^\epsilon \, dN(s)\}$$

et on applique (1) (lemme p. 144). On en déduit le

Lemme 5 : Pour tout $a > 0$ il existe une constante $C(a)$ telle que la solution de

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{v \cdot \nabla \psi}{\epsilon} + \frac{Q\psi}{\epsilon^2} = H^\epsilon \qquad Q1 = 0,$$

$$\psi|_{\Gamma^-} = R[\psi|_{\Gamma^+}] + \epsilon p^\epsilon \qquad R1 = 1,$$

$$\psi(0) = q^\epsilon,$$

verifie $\quad |\psi(t)|_0 \leqslant |q^\epsilon|_0 + t\exp(at)\,|H^\epsilon|_0 + C(a)\exp(at)\,|p^\epsilon|_0.$

Or $\omega_\epsilon \leqslant \phi^\epsilon$ où ϕ^ϵ est la solution de

$$\frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t} + \frac{v \cdot \nabla \phi^\epsilon}{\epsilon} + \frac{Q\phi^\epsilon}{\epsilon^2} - \gamma_0 \phi^\epsilon = h^\epsilon,$$

$$\phi^\epsilon|_{\Gamma^-} = R[\phi^\epsilon|_{\Gamma^+}] + \epsilon f^\epsilon,$$

$$\phi^\epsilon(0) = g^\epsilon.$$

En effet, $u = \omega_\epsilon - \phi^\epsilon$ est solution de

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v \cdot \nabla u}{\epsilon} + \frac{Qu}{\epsilon^2} - \gamma\sigma u = \phi(\gamma\sigma - \gamma_0) \leqslant 0,$$

$$u|_{\Gamma^-} = R[u|_{\Gamma^+}],$$

$u(0) = 0$

d'où $u \leqslant 0$. Posons $W = \phi^\epsilon e^{-\gamma_0 t}$; W est solution de

$$\frac{dW}{dt} + \frac{v \cdot \nabla W}{\epsilon} + \frac{QW}{\epsilon^2} = H^\epsilon, \qquad H^\epsilon = h^\epsilon e^{-\gamma_0 t},$$

$$W|_{\Gamma^-} = R[W|_{\Gamma^+}] + \epsilon F^\epsilon, \qquad F^\epsilon = f^\epsilon e^{-\gamma_0 t},$$

$$W(0) = g^\epsilon,$$

et donc pour tout

$$\alpha > 0, \ |W(t)|_0 \leqslant |g^\epsilon|_0 + t\, e^{\alpha t} |H^\epsilon|_0 + C(\alpha) e^{\alpha t} |F^\epsilon|_0.$$

Donc

$$\omega_\epsilon \leqslant \varphi^\epsilon \leqslant \exp(\gamma_0 t) |g^\epsilon|_0 + t \exp[\alpha + \gamma_0] t |H^\epsilon|_0 + C(\alpha) \times \exp([\alpha + \xi_0] t) |F^\epsilon|_0,$$

et pour tout $\alpha' > \alpha$ il existe $C(\alpha')$ telle que

$$t \exp([\alpha + \gamma_0] t) \leqslant C(\alpha') \exp[\alpha' + \gamma_0] t.$$

D'où le résultat.

Pour f quelconque on aurait un résultat pareil avec une condition aux limites du type $\partial u_0 / \partial v_a = 0$.

References

[1] Benssoussan A, Lions J L et Papanicolaou G 1979 *J. Publ. RIMS Kyoto Univ.* **15** 53
[2] Blankenship G et Papanicolaou 1978 *SIAM J. Appl. Math.* **34** 437
[3] Sentis 1979 *CR Acad. Sci.* **A289** 567
[4] Sentis R 1981 Analyse asymptotique des équations de transport (à paraître).